

Кварк-адронный фазовый переход в магнитном поле

Н.О.Агасян

ИТЭФ, Москва

В ранней Вселенной, на энергетической шкале сильных взаимодействий, могли существовать сильные магнитные поля $eH \sim \Lambda_{QCD}^2 \approx 10^{19}$ Гс. Такие напряженности магнитных полей могут приводить к новым интересным явлениям на стадии кварк-адронного фазового перехода. В магнитных звездах возможны напряженности $eH \sim 10^{15}$ Гс. С другой стороны, представляет и чисто теоретический интерес исследование влияния внешнего магнитного поля на динамику сильных взаимодействий.

В евклидовой формулировке, статистическая сумма КХД при наличии внешнего абелева поля A_μ может быть записана в виде ($T = 1/\beta$ – температура)

$$Z = \exp \left\{ -\frac{1}{4e^2} \int_0^\beta dx_4 \int_V d^3x F_{\mu\nu}^2 \right\} \int [DB][D\bar{q}][Dq] \\ \times \exp \left\{ -\int_0^\beta dx_4 \int_V d^3x \mathcal{L} \right\},$$

где лагранжиан КХД в фоновом поле имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4g_0^2} (G_{\mu\nu}^a)^2 + \sum_{q=u,d} \bar{q} [\gamma_\mu (\partial_\mu - iQ_q A_\mu - i\frac{\lambda^a}{2} B_\mu^a) + m_q] q,$$

Q_q – зарядовая матрица кварков с ароматом $q = (u, d)$. Плотность свободной энергии определяется выражением

$$\beta V F(T, H, m_q) = -\ln Z$$

При низких температурах $T < T_c$ (T_c – температура кирального фазового перехода) и в области слабых полей $H < \mu_{hadr}^2 \sim (4\pi F_\pi)^2$, характерные импульсы в вакуумных петлях малы, и теория адекватно описывается эффективным низкоэнергетическим лагранжианом L_{eff} . L_{eff} представляется в виде разложения в ряд по импульсам (производным) и массам

$$L_{\text{eff}} = L^{(2)} + L^{(4)} + L^{(6)} + \dots$$

Лидирующий член $L^{(2)}$ подобен лагранжиану нелинейной σ -модели во внешнем поле V_μ

$$L^{(2)} = \frac{F_\pi^2}{4} \text{Tr}(\nabla_\mu U^\dagger \nabla_\mu U) + \Sigma \text{Re Tr}(\hat{M}U^\dagger),$$

$$\nabla_\mu U = \partial_\mu U - i[U, V_\mu].$$

U -унитарная $SU(2)$ матрица, $F_\pi = 93$ МэВ и $\Sigma = |\langle \bar{u}u \rangle| = |\langle \bar{d}d \rangle|$.

Внешнее абелево магнитное поле H , направленное вдоль оси z , соответствует $V_\mu(x) = (\tau^3/2)A_\mu(x)$ и вектор-потенциал A_μ выбирается в виде $A_\mu(x) = \delta_{\mu 2} H x_1$. Пренебрегаем нарушением изоспиновой симметрии сильных взаимодействий и полагаем массы легких u - и d - кварков равными, $m_u = m_d = m_q$, и, соответственно, массовую матрицу диагональной, $\hat{M} = m_q \hat{I}$.

При $T < T_c$, $H < \mu_{had}^2$ статистическая сумма КХД совпадает со статистической суммой эффективной киральной теории

$$Z_{\text{eff}}[T, H] = e^{-\beta V F_{\text{eff}}[T, H]} =$$

$$Z_0[H] \int [DU] \exp\left\{-\int_0^\beta dx_4 \int_V d^3x L_{\text{eff}}[U, A]\right\}$$

В однопетлевом приближении, достаточно использовать разложение L_{eff} до квадратичных по пионному полю слагаемых. В экспоненциальной параметризации матрицы

$U(x) = \exp\{i\tau^a \pi^a(x)/F_\pi\}$ находим

$$L^{(2)} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^0)^2 + \frac{1}{2}M_\pi^2(\pi^0)^2 +$$

$$(\partial_\mu \pi^+ + iA_\mu \pi^+)(\partial_\mu \pi^- - iA_\mu \pi^-) + M_\pi^2 \pi^+ \pi^-,$$

где введены поля заряженных π^\pm и нейтрального π^0 мезонов

$$\pi^\pm = (\pi^1 \pm i\pi^2)/\sqrt{2}, \quad \pi^0 = \pi^3$$

Таким образом, (1) переписывается в виде

$$Z_{\text{eff}}^R[T, H] = Z_{PT}^{-1} Z_0[H] \int [D\pi^0][D\pi^+][D\pi^-]$$

$$\times \exp\left\{-\int_0^\beta dx_4 \int_V d^3x L^{(2)}[\pi, A]\right\}$$

где мы нормировали статистическую сумму на случай теории возмущений при $T = 0, H = 0$

$$Z_{PT} = [\det(-\partial_\mu^2 + M_\pi^2)]^{-3/2}.$$

Интегрируя по π - полям получим

$$Z_{\text{eff}}^R = Z_{PT}^{-1} Z_0[H] [\det_T(-\partial_\mu^2 + M_\pi^2)]^{-1/2} [\det_T(-|D_\mu|^2 + M_\pi^2)]^{-1},$$

где $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$ -ковариантная производная и символ T означает, что детерминант вычисляется при конечной температуре T по стандартным мацубаровским правилам. Перегруппировав сомножители для Z_{eff}^R имеем выражение

$$Z_{\text{eff}}^R[T, H] = Z_0[H] \left[\frac{\det_T(-\partial_\mu^2 + M_\pi^2)}{\det(-\partial_\mu^2 + M_\pi^2)} \right]^{-1/2} \left[\frac{\det(-|D_\mu|^2 + M_\pi^2)}{\det(-\partial_\mu^2 + M_\pi^2)} \right]^{-1} \\ \times \left[\frac{\det_T(-|D_\mu|^2 + M_\pi^2)}{\det(-|D_\mu|^2 + M_\pi^2)} \right]^{-1}$$

Эффективная свободная энергия

$$F_{\text{eff}}^R(T, H) = -\frac{1}{\beta V} \ln Z_{\text{eff}}^R = \frac{H^2}{2e^2} + F_{\pi^0}(T) + F_{\pi^\pm}(H) + F_{\text{dia}}(T, H).$$

F_{π^0} – свободная энергия массивного скалярного бозона

$$F_{\pi^0}(T) = T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln(1 - \exp(-\sqrt{\mathbf{p}^2 + M_\pi^2}/T)),$$

F_{π^\pm} - результат Швингера для плотности вакуумной энергии заряженных скалярных частиц в магнитном поле

$$F_{\pi^\pm}(H) = -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-M_\pi^2 s} \left[\frac{Hs}{\sinh(Hs)} - 1 \right],$$

Свободная энергия при $H \neq 0, T \neq 0$ для заряженных π^\pm -мезонов

$$F = \text{Tr} \ln(p_4^2 + \omega_0^2(\mathbf{p}))$$

$$p_4 \rightarrow \omega_k = 2\pi kT, \quad (k = 0, \pm 1, \dots),$$

$$\omega_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M_\pi^2} \rightarrow \omega_n = \sqrt{p_z^2 + M_\pi^2 + H(2n + 1)}$$

и

$$\text{Tr} \rightarrow \frac{HT}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi},$$

где учтена кратность вырождения уровней Ландау $H/2\pi$. Суммируя по мацубаровским частотам

$$F_{\text{dia}}(T, H) = \frac{HT}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \ln(1 - \exp(-\omega_n/T)),$$

$$\omega_n = \sqrt{k^2 + M_\pi^2 + H(2n + 1)},$$

где ω_n - уровни Ландау π^\pm - мезонов в постоянном магнитном поле.

Для того чтобы получить зависимость кваркового конденсата от T и H используем соотношение Гелл-Манна–Оукса–Реннера

$$F_\pi^2 M_\pi^2 = -\frac{1}{2}(m_u + m_d)\langle\bar{u}u + \bar{d}d\rangle = 2m\Sigma$$

Тогда сдвиг кваркового конденсата

$$\frac{\Delta\langle\bar{q}q\rangle(T, H, M_\pi)}{\langle\bar{q}q\rangle} = -\frac{1}{F_\pi^2} \frac{\partial F_{\text{eff}}^R}{\partial M_\pi^2}$$

В случае слабого поля и низких T , $\sqrt{H} \ll T \ll M_\pi$

$$\begin{aligned} \frac{\langle\bar{q}q\rangle(T, H, M_\pi)}{\langle\bar{q}q\rangle} &= 1 - 3\sqrt{8\pi} \frac{M_\pi^{1/2} T^{3/2}}{(4\pi F_\pi)^2} e^{-M_\pi/T} + \frac{H^2}{96\pi^2 F_\pi^2 M_\pi^2} \\ &+ \frac{H^2}{48\sqrt{2}\pi^{3/2} F_\pi^2 M_\pi^{3/2} T^{1/2}} e^{-M_\pi/T}. \end{aligned}$$

в киральном пределе, $M_\pi \rightarrow 0$

$$\frac{\langle \bar{q}q \rangle(T, H)}{\langle \bar{q}q \rangle} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{T^2}{8F_\pi^2} + \frac{H}{(4\pi F_\pi)^2} \ln 2 - \frac{H^{3/4} T^{1/2}}{(2\pi)^{3/2} F_\pi^2} e^{-\sqrt{H}/T}, \quad \sqrt{H} \gg T,$$

и

$$\frac{\langle \bar{q}q \rangle(T, H)}{\langle \bar{q}q \rangle} = 1 - \frac{T^2}{8F_\pi^2} + \frac{H}{(4\pi F_\pi)^2} A - \frac{7\sqrt{HT}}{48\pi F_\pi^2} - \frac{H}{(4\pi F_\pi)^2} \ln \frac{H}{T^2}, \quad \sqrt{H} \ll T,$$

где $A = \ln 2 - 8C \simeq 4.93$.

Плазма горячих кварков и глюонов при $T > T_c$ в магнитном поле представляет собой термодинамическую систему находящуюся в парамагнитной фазе. С другой стороны, при низких температурах, $T < T_c$, адронное вещество, состоящее в основном из скалярных π -мезонов, находится в диамагнитной фазе. Термодинамически, с точки зрения минимума свободной энергии (максимума давления), системе предпочтительнее находится в парамагнитной фазе. По этой причине, температура перехода от адронной фазы к кварк–глюонной уменьшается по сравнению со случаем нулевого магнитного поля $H = 0$. Таким образом, аналогия с физикой конденсированного состояния следующая: фазе конфайнмента отвечает диамагнитный газ скалярных π -мезонов (мы пренебрегаем вкладом более тяжелых адронов) и фазе деконфайнмента – парамагнитная плазма кварков и глюонов.

Для того чтобы определить температуру фазового перехода, запишем давление в двух фазах. В фазе конфайнмента, давление газа π -мезонов в магнитном поле записывается в виде

$$P_1(T, H) = P_{\pi^0}(T) + P_{\pi^\pm}(H) + P_{dia}(T, H),$$

где давление нейтрального газа π^0 -мезонов имеет вид

$$P_{\pi^0}(T) = -T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(1 - \exp(-\sqrt{p^2 + M_\pi^2}/T)).$$

Не зависящий от температуры, перенормированный вклад в давление от вакуумной поляризации заряженных π^\pm -мезонов (Швингеровская поляризация) есть

$$P_{\pi^\pm}(H) = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-M_\pi^2/s} \times \left[\frac{eHs}{\sinh(eHs)} - 1 + \frac{1}{6}(eHs)^2 \right].$$

И диамагнитное слагаемое в давлении, происходящее от заряженных π^\pm мезонов

$$P_{dia}(T, H) = -\frac{HT}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dp_z \ln(1 - \exp(-\omega_n/T)),$$
$$\omega_n = \sqrt{p_z^2 + M_\pi^2 + eH(2n + 1)}.$$

Далее мы будем рассматривать “слабое” магнитное поле, $eH < T_c \approx 10^{19} G$, и Швингеровским вкладом в давление будем пренебрегать. В слабом поле для P_{dia} можно использовать формулу суммирования Эйлера-Маклорена

$$\frac{1}{2}F(a) + \sum_{n=1}^{\infty} F(a + n) \approx \int_0^{\infty} dx F(x) - \frac{1}{12}F'(a)$$

$$P_{dia} = 2P_{\pi^0}(T) - \frac{(eH)^2}{12\pi^2} h_1 \left(\frac{M_\pi}{T} \right),$$

$$h_1(z) = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 + z^2} (e^{\sqrt{x^2 + z^2}} - 1)}.$$

В плазменной, кварк-глюонной, фазе давление представляется в виде

$$P_{pl}(T, H) = 2(N_c^2 - 1) \frac{\pi^2}{90} T^4 + P_q(H) + P_{para}(T, H)$$

здесь слагаемое $\propto T^4$ происходит от газа горячих глюонов, $P_q(H)$ есть вклад в давление возникающий от вакуумной поляризации кварков

$$P_q(H) = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{q=u,d} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-m_q^2 s} \\ \times \left[|e_q| H s \operatorname{cth}(|e_q| H s) - 1 - \frac{1}{3} (e_q H s)^2 \right]$$

и P_{para} -парамагнитное слагаемое в давлении кварков в магнитном поле

$$P_{para} = 2N_c \sum_{q=u,d} \frac{|e_q| H}{2\pi} T \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \\ \times \ln(1 + e^{-\omega_q/T}), \\ \omega_q = p_z^2 + m_q^2 + |e_q| H (2n + 1 + 2\sigma).$$

Далее, в слабом поле, используя формулу суммирования Эйлера–Маклорена получаем

$$P_{para} = P_q(T, H = 0) + \frac{N_c Q^2 (eH)^2}{6\pi^2} f_1\left(\frac{m}{T}\right)$$
$$f_1(z) = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 + z^2} (e^{\sqrt{x^2 + z^2}} + 1)}.$$

где мы положили $m_u = m_d = m$ и $Q^2 = (e_u^2 + e_d^2)/e^2 = (\frac{4}{9} + \frac{1}{9}) = \frac{5}{9}$, и давление $P_q(T, H = 0)$ записывается в виде

$$P_q(T, H = 0) = \frac{4N_c}{\pi^2} T^4 \int_0^\infty x^2 dx \ln\left(1 + e^{-\omega_q/T}\right),$$
$$\omega_q = \sqrt{x^2 + m^2/T^2}.$$

Важным физическим свойством фазового перехода является перестройка непертурбативного вакуума КХД. Из-за масштабной аномалии в следе тензора энергии-импульса в КХД возникает новая размерная величина $\langle G^2 \rangle \equiv \langle (G_{\mu\nu}^a)^2 \rangle$ – глюонный конденсат. Непертурбативная плотность энергии вакуума связана с $\langle G^2 \rangle$ соотношением

$$\varepsilon_{vac} = -\frac{b}{128\pi^2} \langle G^2 \rangle,$$

где $b = (3N_c - 2N_f)/3$, $N_c = 3$ -число цветов, и $b = 29/3$ при $N_f = 2$. Плотность энергии вакуума-величина отрицательная, и термодинамически выгодным оказывается состояние с $\langle G^2 \rangle \neq 0$. Теоретические исследования и численные расчеты в решеточной аппроксимации КХД показывают, что в точке фазового перехода T_c часть (хромoeлектрическая компонента) конденсата обращается в ноль, в то время как хромоманнитный конденсат почти не меняется по сравнению со значением при $T = 0$.

В вакууме (при $T = 0$), $\langle (E_i^a)^2 \rangle = \langle (H_i^a)^2 \rangle$, и тем самым плотность энергии вакуума выше точки перехода оказывается по абсолютной величине меньше, чем до перехода, на величину, примерно равную

$$\Delta\varepsilon_v = \frac{1}{2} |\varepsilon_{vac}| = \frac{b}{256\pi^2} \langle G^2 \rangle.$$

Учитывая сказанное, в уравнение состояния в плазменной фазе необходимо добавить величину- $\Delta\varepsilon_v$. Таким образом, давление в состоянии кварк-глюонной плазмы определяется соотношением

$$P_2(T) = P_{pl}(T, H) - \Delta\varepsilon_v.$$

Температура перехода находится из условия равенства давлений для обеих фаз

$$P_1(T_c, H) = P_2(T_c, H).$$

При выключенном магнитном поле и в киральном пределе находим

$$T_c = \left(\frac{\Delta\varepsilon_v}{(\gamma - 3)(\pi^2/90)} \right)^{1/4}.$$

Здесь $\gamma = 2 \cdot (N_c^2 - 1) + (7/8) \cdot 2 \cdot 2 \cdot N_c \cdot N_f$ число независимых степеней свободы глюонов и кварков и $\gamma = 37$ для $N_c = 3$, $N_f = 2$. Расчеты на решетке дают значение $\langle G^2 \rangle = 0.87 \text{ GeV}^4$ и для температуры перехода $T_c \simeq 177 \text{ MeV}$ при $H = 0$.

Учет магнитного поля, в первом приближении, приводит к сдвигу плотности вакуумной энергии

$$\Delta\varepsilon_v^H = \Delta\varepsilon_v - (eH)^2 V,$$

где

$$V = \frac{1}{12\pi^2} \left[h_1 \left(\frac{M_\pi}{T_c} \right) + 2N_c Q^2 f_1 \left(\frac{m}{T_c} \right) \right].$$

При $M_\pi = 140 \text{ MeV}$ и $m \approx 5 \text{ MeV}$, $V = 6.1 \cdot 10^{-2}$

Рассматривая слагаемое $(eH)^2 V$ как возмущение, находим, что относительный сдвиг температуры фазового перехода деконфайнмента в присутствии магнитного поля есть

$$T_c^H = T_c \left(1 - \frac{V}{4\Delta\varepsilon_v} (eH)^2 \right)$$

и $V/4\Delta\varepsilon_v \simeq 9.2 \text{GeV}^{-4}$.

Плотность энергии

$$\varepsilon = T \frac{dP}{dT} - P$$

Скрытая теплота перехода

$$\Delta\varepsilon(T_c) = \varepsilon_2(T_c) - \varepsilon_1(T_c)$$

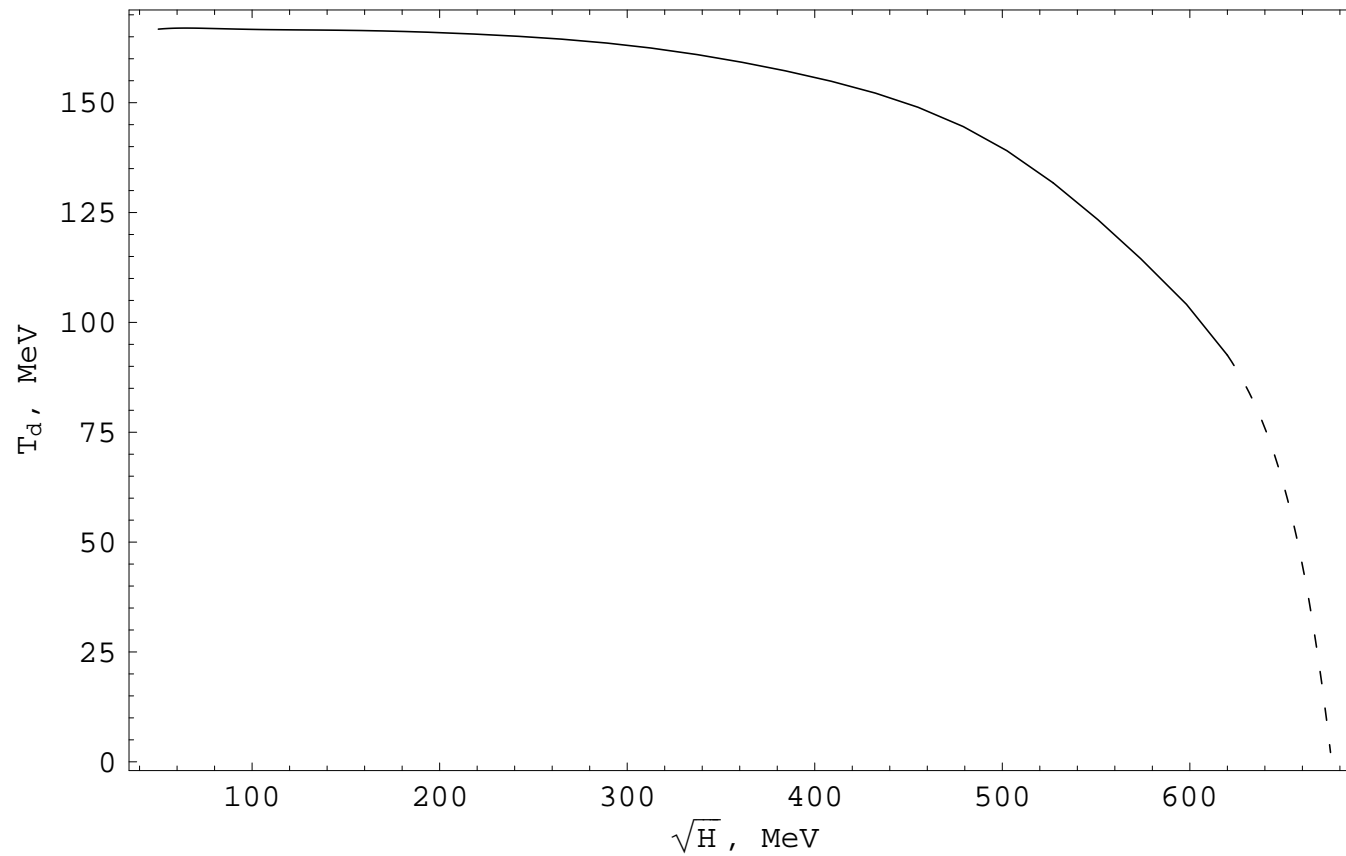


Рис. 1: Критическая температура кварк-адронного фазового перехода $T_c(\text{MeV})$ как функция $\sqrt{eH}(\text{MeV})$

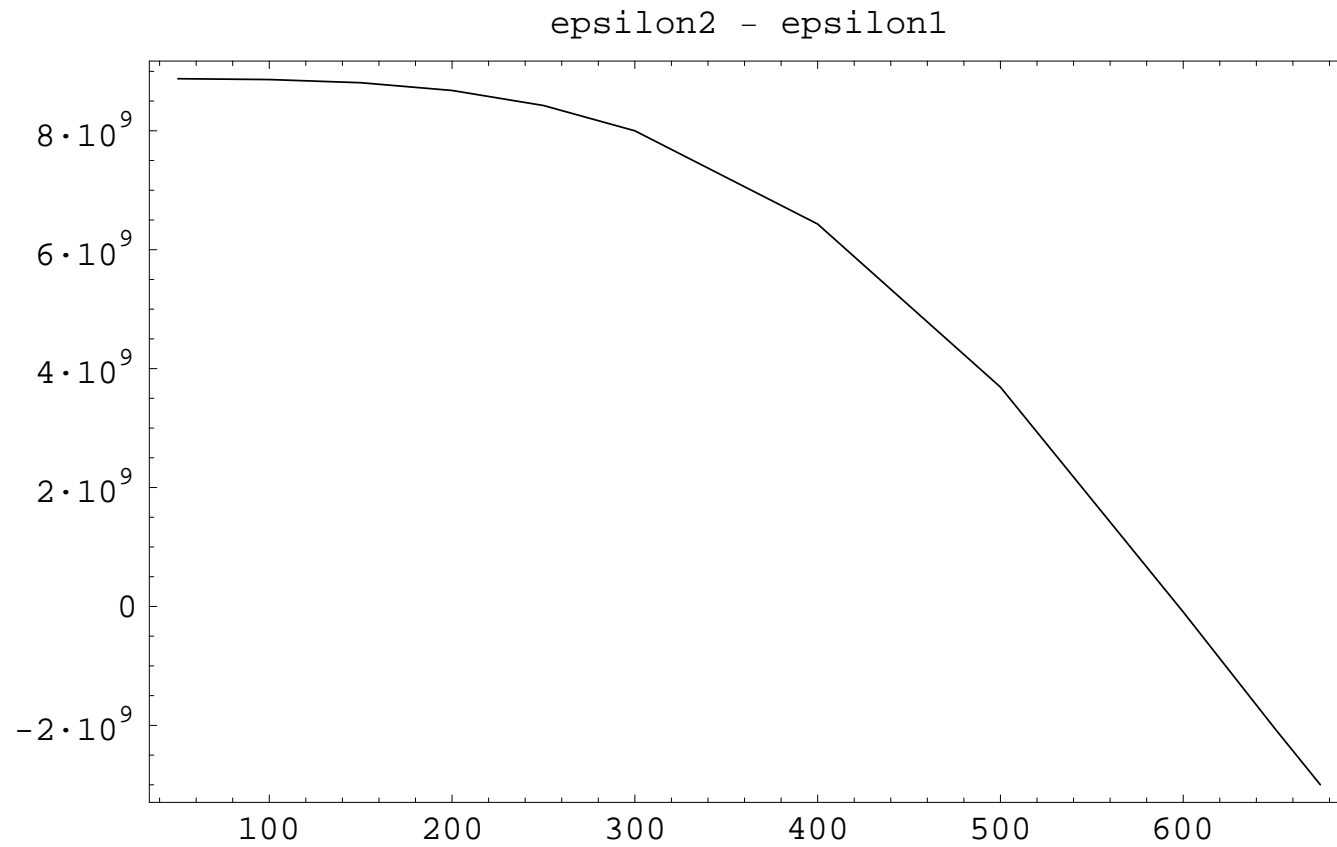


Рис. 2: Скрытая теплота фазового перехода $\Delta\varepsilon(T_c)$ (MeV⁴) как функция \sqrt{eH} (MeV)

В КХД имеет место эффект замораживания параметра порядка кирального фазового перехода. Как принято считать, основываясь на результатах расчетов на решетке, фазовые переходы деконфайнмента и киральный происходят при одной и той же температуре T_c при $H = 0$. С другой стороны, как было показано выше, при включении магнитного поля критическая температура кварк–адронного фазового перехода уменьшается по сравнению со случаем $H = 0$. Температура кирального фазового перехода, наоборот увеличивается. Таким образом, температуры кирального и кварк–адронного фазовых переходов в магнитном поле раздвигаются. Соответственно, возникает температурный интервал, где уже произошел кварк–адронный фазовый переход, но киральная симметрия все еще нарушена. В этом интервале возможно одновременное существование бесцветных π –мезонов и цветных кварков и глюонов. Данное явление может оказаться важным при рассмотрении кварк–адронного фазового перехода в ранней Вселенной.