Поверхностные состояния атомов и их вклад в поверхностное натяжение квантовых жидкостей

P.D. Grigoriev, A.M. Dyugaev, E.V. Lebedeva, A.D. Grigoriev

- 1. Новый тип возбуждений на поверхности жидкостей при низкой температуре. Феноменологические обоснования существования этого вида поверхностных возбуждений: температурная зависимость поверхностного натяжения [1], подвижность электронов на поверхности гелия и водорода [2], сдвиг и ширина линии переходов электронов на поверхности жидкого гелия и водорода [3].
- Микроскопическая модель сюрфонов как связанных состояний атомов над поверхностью жидкости. Квантово-механический расчет уровней энергии поверхностных атомов и обоснование их существования. Оценка эффективной массы сюрфонов [4].
- 3. Оценка времени жизни сюрфонов.

[1] А.М. Дюгаев, П.Д. Григорьев, Письма в ЖЭТФ, 78, 935 (2003)
[2] Р.D. Grigoriev, А.М. Dyugaev, E.V. Lebedeva, JETP 104 (1), р. 1-10 (2008)
[3] Р. D. Grigor'ev, A. M. Dyugaev and E. V. Lebedeva, JETP Lett. 87, 106 (2008)
[4] А.D. Grigoriev, A.M. Dyugaev, P.D. Grigoriev, J. Low Temp. Phys. 163, 131–147 (2011)



Жидкий гелий – вероятно, самая чистая система в физике конденсированного состояния. Все примеси в гелии при низкой температуре оседают на подложке и стенках, поскольку притягиваются к ним силами Ван-дер-Ваальса. При низкой температуре (T~1-4K) поверхность жидкости становится ровной и гладкой, и остается только один тип возбуждений – риплоны (кванты поверхностных волн). Концентрация пара гелия дается распределением Больцмана и оказывается экспоненциально мала при низкой температуре:



$$N(T) \propto \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right), \Delta E = 7.17K.$$

Закон дисперсии риплонов (каппилярно-гравитационных волн)

$$\omega_q^2 = \frac{\sigma_{He}}{\rho_{He}} q(q^2 + \kappa^2) \tanh(qd),$$
где

плотность гелия 4: $\rho_{He4} = 0.147 g / cm^3$, d - глубина жидкости,

коэффициент поверхностного натяжения $\sigma_{He4} = 0.36 dyn / cm, \kappa = 20 cm^{-1}.$ При q>>к волны называются каппилярные, при q<<к - гравитационные.

Проблема температурной зависимости

поверхностного натяжения

Коэффициент поверхностного натяжения σ – это свободная энергия поверхности на единицу площади. При низкой температуре *T->0* $\sigma=\sigma_0>0$, и поправка $\Delta\sigma(T)=\sigma(0)-\sigma(T)$ определяется всеми возбуждениями в системе. В ⁴Не имеются только риплоны, но их вклада недостаточно чтобы объяснить величину $\Delta\sigma(T)$. В ³Не из-за большой вязкости при низкой *T* отсутствуют коротковолновые риплоны, вклад которых в свободную энергию является определяющим из-за большего фазового пространства (числа состояний).



Поверхностные атомы



Температурную зависимость $\Delta \sigma(T)$ поверхностного натяжения обоих изотопов жидкого гелия можно объяснить и достичь хорошего согласия теории и эксперимента, предложив существование нового типа возбуждений - сюрфонов, похожих на связанные состояния атомов вблизи поверхности, свободно распространяющиеся вдоль поверхности.

[А.М. Дюгаев, П.Д. Григорьев, «Поверхностное натяжение чистых изотопов жидкого гелия», Письма в ЖЭТФ, 78, 935 (2003)]

При этом внутренняя структура сюрфонов не рассматривалась, так как для объяснения экспериментов по поверхностному натяжению достаточно было ввести только два параметра, характеризующие сюрфоны: их энергию активации и эффективную массу.

Квантовомеханический расчет энергии поверхностных атомов.

Простейший потенциал взаимодействия двух атомов гелия (потенциал Леннарда – Джонса) имеет вид [ЛЛ том 3]

$$v(r) = 4\varepsilon_0 \left[\left(\frac{\sigma_0}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma_0}{r} \right)^6 \right] \quad (1)$$

Интегрированием (1) по полупространству *z<0* получаем

$$V(z) = V_0 \left[\left(\frac{\sigma_{0^*}}{z} \right)^9 - \left(\frac{\sigma_{0^*}}{z} \right)^3 \right] \qquad (2)$$

Для гелия 4 $V_0 = 140 K$ $\sigma_{0^*} = 2.09 A$

Решая одномерное уравнения Шредингера с потенциалом (2) находим энергию *E* связанного состояния атома на поверхности, которая для двух изотопов жидкого гелия равна: *ГНе*4 ст. 1 04 *V* = *ГНе*3 ст. 0 240 *I*

$$E_{s0}^{He4} \approx -1.24 K$$
, и $E_{s0}^{He3} \approx -0.342 K_{s0}$

Это значительно отличается от значений, дающих наилучшее согласие с данными по поверхностному натяжению:

 $E_s^{He4}\approx -4.5K$ и $E_s^{He3}\approx -2.25K_{\rm c}$

Существование уровня доказывает существование сюрфонов!

Лунка под сюрфоном и его энергия активации



Полная энергия образования лунки:

$$E_{tot} = E_{surf} + E_W + E_k$$

Энергия поверхностного натяжения

$$E_{surf} = \alpha \int_0^\infty \pi \rho \left[\xi'(\rho) \right]^2 d\rho$$

Выигрыш энергии взаимодействия между атомами гелия

$$E_W = \int d^3 \mathbf{r} \Delta n_b(\mathbf{r}) V_{LJ}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

Квантовая кинетическая энергия

$$E_k = \frac{\hbar^2 \alpha_1^2}{2M^0 R^2} \approx \frac{2.88\hbar^2}{M^0 R^2},$$

Минимизация полной энергии дает глубину и энергию образования лунки:

$$E_{4tot\min} \approx -2.7 \text{ K}$$

$$E_{3tot \min} \approx -1.85(\pm 0.1) \text{ K},$$

Оценка эффективной массы сюрфона



Эффективная масса сюрфона дается полным объемом лунки:

$$M_4^* \approx M_4^0 (1 + n_{He4} V_{4d}) = 2.04 M_4^0.$$

$$M_3^* \approx M_3^0 (1 + n_{He3} V_{3d}) = 2.23 M_3^0.$$

A.D. Grigoriev, A.M. Dyugaev, P.D. Grigoriev, J. Low Temp. Phys. 163, 131–147 (2011).

Наилучшее согласие с экспериментом по температурной зависимости поверхностного натяжения ⁴Не и ³Не дает $M_4^* \approx 2.65 M_4^0$, and $M_3^* \approx 2.25 M_3^0$,





Поверхностное натяжение ⁴Не

Концентрация поверхностных атомов зависит от их энергии ε(k), температуры, и хим. потенциала μ согласно статистике Бозе [ЛЛ том 5]:

$$n_4(T) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\exp\left(\frac{\varepsilon_4(k) - \mu_4}{T}\right) - 1 \right]^{-1}, \ \varepsilon_4(k) = \Delta_4 + \frac{(\hbar k)^2}{2M_4^*}$$

Коэффициент поверхностного $\sigma_4(T) = \sigma_4(0) + \sigma_4^R(T) + \Omega_4^S(\mu_4, T),$

де вклад риплонов
$$\sigma_4^R(T) = -AT^{7/3}$$
 (Atkins, 1953)

вклад двумерного газа поверхностных атомов

$$\Omega_{4}(T) = -T \int \frac{d^{2}k}{(2\pi)^{2}} \ln \left[1 - \exp\left(\frac{\mu_{4} - \varepsilon_{4}(k)}{T}\right) \right] = -\frac{M_{4}^{*}T^{2}}{\pi \hbar^{2}} \int_{0}^{\infty} \frac{x \, dx}{\exp\left(x + \frac{\Delta_{4}}{T}\right) - 1}.$$

[А.М. Дюгаев, П.Д. Григорьев, «Поверхностное натяжение чистых изотопов жидкого гелия», Письма в ЖЭТФ, 78, 935 (2003)]

Поверхностное натяжение ⁴Не (сравнение с экспериментом)



Temperature dependence of the surface tension σ_4 determined from equation

$$\sigma_4(T) = \sigma_4(0) - AT^{7/3} - \alpha_4^0 T^2 \int_{0}^{\infty} \frac{x \, dx}{\exp\left(\frac{\Delta_4}{T} + x\right) - 1}$$

for liquid ⁴He (solid line) and (dotted line) the rippion contribution to $\sigma_4(T)$. Points are the experimental data.

Вычисление вклада поверхностных атомов в поверхностное натяжение ³Не

Концентрация поверхностных атомов зависит от их энергии ε(k), температуры, и хим. потенциала μ согласно статистике Ферми [ЛЛ том 5]:

$$n_{3}(T) = 2 \int \frac{d^{2}k}{(2\pi)^{2}} \left[\exp\left(\frac{\varepsilon_{3}(k) - \mu_{3}}{T}\right) + 1 \right]^{-1}, \ \varepsilon_{3}(k) = \Delta_{3} + \frac{(\hbar k)^{2}}{2m_{3}}$$

Коэффициент поверхностного натяжения

Подо

ДЛЯ

$$\sigma_3(T) = \sigma_3(0) + \Omega_3(\mu_3, T),$$

где термодинамический потенциал единицы площади поверхности определяется вкладом двумерного газа поверхностных атомов

$$\Omega_3(T) = -2T \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \ln \left[1 + \exp\left(\frac{\mu_3 - \mathcal{E}_3(k)}{T}\right) \right].$$

становка констант
³Не дает
$$\sigma_3(T) = 155.3 - 61.2T^2 \int_0^\infty \frac{xdx}{\exp\left(x + \frac{\Delta_3}{T}\right) + 1}$$

[А.М. Дюгаев, П.Д. Григорьев, Письма в ЖЭТФ, 78, 935 (2003)]



[А.М. Дюгаев, П.Д. Григорьев, Письма в ЖЭТФ, 78, 935 (2003)]

Температурная зависимость поверхностного натяжения ⁴Не и ³Не может быть объяснена с учетом экспериментальной температурной зависимости хим. потенциала жидкого гелия.



Вычисленая эффективная масса сюрфона в адиабатическом приближении (поверхность гелия успевает подстроиться под движущийся атом):

Наилучшее согласие с экспериментом дают

$$M_4^* \approx M_4^0 (1 + n_{He4} V_{4d}) = 2.04 M_4^0.$$

$$M_3^* \approx M_3^0 (1 + n_{He3} V_{3d}) = 2.23 M_3^0.$$

Fig. 3

 $M_4^* \approx 2.65 M_4^0$, and $M_3^* \approx 2.25 M_3^0$,

A.D. Grigoriev, A.M. Dyugaev, P.D. Grigoriev, J. Low Temp. Phys. 163, 131–147 (2011).

Сравнение вкладов риплонов и сюрфонов в поверхностное натяжение ⁴Не

Fig. 6 The temperature dependence of the surface tension of ⁴He, divided by T^2 . This graph shows the comparison between our theory and experiment in the coordinates where the difference can be visually observed. The low-temperature deviation at $T < T_{\lambda}$ is due to the ripplon contribution, while the deviation at T > 4 K is due to the proximity to the boiling point. The ripplon contribution at $T < T_{\lambda}$, extracted from this graph, is shown in Fig. 7

> Fig. 7 The difference between the calculated temperature dependence of the surface tension $\alpha_4(T)$ of ⁴He, where only the surfon contribution given by (28) is taken into account, and the experimental values $\alpha_{4 \exp}(T)$. The maximum at $T \approx 1.1$ K is due to the ripplon contribution. The second maximum at $T \approx 2.17$ K corresponds to phase transition at the λ -point of ⁴He



Electrons on the liquid helium surface (introduction).

Properties of electrons on the helium surface:

- **1. Electrons float on the surface** (an electron in the bulk of helium form a bubble of higher energy)
- 2. Surface electrons interact only with helium vapor and ripplons.
 (The system is very pure. All outer particles are attracted to the wall and bottom of the vessel)





Introduction

Electron energy as function of height near the helium surface



Electrons are clamped to the surface by external electric field and by image forces similar to semiconductor heterostructures.

A 2D electron gas is formed on the helium surface

Другие эксперименты, указывающие на существование сюрфонов (1)

Квантовые переходы электронов над поверхностью жидкого



Рис.2. Зависимость частоты перехода ν_{12} от плотности пара n_v и поверхностной плотности n_s , построенная по опытным данным [2]. График отвечает формулам (9), (15): $\nu_{12}(n_v) - \nu_{12}(0) \sim n_v^{\gamma} \sim n_s$ Учет сюрфонов позволяет объяснить температурную зависимость частоты электронных переходов между дискретными уровнями на поверхности водорода.

P. D. Grigor'ev, A. M. Dyugaev and E. V. Lebedeva, JETP Lett. 87, 106 (2008)"*Temperature dependence of the spectrum of electrons levitating above solid hydrogen*".

$$\Delta E_n = \frac{2\pi\hbar^2 a_0}{m} \int_0^\infty \varphi_{n0}^2(z) n_v(z) dz.$$

Experimental data are from V. V. Zav'yalov and I. I. Smol'yaninov, Zh. Éksp. Teor. Fiz. 92, 339 (1987) [Sov. Phys. JETP 65, 194 (1987)].

Сдвиг частоты электронных переходов ~ концентрации n_s сюрфонов (поверхностных атомов), а не атомов пара n_v :

$$v_{12}(n_s) = v_{12}(0) \left(1 - \lambda \frac{n_s}{n_{s0}} \right)$$

Другие эксперименты, указывающие на существование сюрфонов (2)

Подвижность электронов над поверхностью жидкого гелия.

Рассеяния поверхностных электронов на риплонах и на атомах пара гелия не достаточно (с коэффициентом в ~2 раза) для объяснения низкой подвижности электронов на поверхности. Учет сюрфонов улучшает согласие с экспериментом в ~1.5 раза.



[P.D. Grigoriev, A.M. Dyugaev, E.V. Lebedeva, "Electron mobility on a surface of dielectric media: influence of surface level atoms", JETP 104 (1), p. 1-10 (2008);]

Взаимодействие сюрфонов с электронами на поверхности жидкого гелия слабо из-за малости волновой функции (ВФ) электронов в области максимума ВФ сюрфонов *z* ≈ 4*A*.



Оценка времени жизни поверхностных атомов

Существуют два канала, ограничивающие время жизни сюрфона как квазичастицы: (1) погружение в жидкость и (2) испарение.





Выводы

- Предложен новый тип возбуждений на поверхности жидкостей при низкой температуре: одиночные атомы или молекулы жидкости на квантовом уровне энергии вблизи поверхности (сюрфоны).
- Построена грубая микроскопическая модель этих возбуждений. Обосновано их существование прямым расчетом их энергии активации и эффективной массы.
- Впервые объяснена сильная температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения обоих изотопов жидкого гелия.
- Впервые объяснена температурная зависимость и величина сдвига линии перехода между квантовыми уровнями электронов на поверхности водорода.
- Оценен вклад сюрфонов в подвижность электронов
- Приведена оценка времени жизни сюрфонов.

Лунка под сюрфоном и его энергия активации



Полная энергия образования лунки:

$$E_{tot} = E_{surf} + E_W + E_k$$

Энергия поверхностного натяжения

$$E_{surf} = \alpha \int_0^\infty \pi \rho \left[\xi'(\rho) \right]^2 d\rho$$

Выигрыш энергии взаимодействия между атомами гелия

$$E_W = \int d^3 \mathbf{r} \Delta n_b(\mathbf{r}) V_{LJ}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

Квантовая кинетическая энергия

$$E_k = \frac{\hbar^2 \alpha_1^2}{2M^0 R^2} \approx \frac{2.88\hbar^2}{M^0 R^2},$$

Минимизация полной энергии дает глубину и энергию образования лунки:

$$E_{4tot\min} \approx -2.7 \text{ K}$$

$$E_{3tot \min} \approx -1.85(\pm 0.1) \text{ K},$$

Appendix 1

Contribution of surface level atoms to the electron scattering

Inverse scattering time is related to the He atom density n(z) above the surface

$$\frac{1}{\tau} = \int dz \, \Psi_e^4(z) n_{He}(z) \frac{A\hbar\pi}{m}.$$

This He atom density n(z) contains vapor atoms and surface level atoms.Electron mobility $\eta = \tau / m$.

Mobility of electrons above ³He

The correction from SLA to electron mobility is essential only for 3He. This correction can be detected from the temperature and field dependence.



Effective interaction between surface electron and SLA is small.



Electron wave function above helium surface for several values of clamping field (numerical calculation).

Contribution from surface level atoms to electron scattering is small because of small overlap of their wave functions: the electron wave function is localized on a distance ~100A, while the helium atom is localized on a distance ~5A

Дополнение 1: Оценка времени испарения поверхностных атомов из-за взаимодействия с риплонами

Взаимодействие с риплоном может привести к испарению сюрфона. Вероятность этого рассчитывается по теории возмущений:

$$dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |F_{fi}|^2 \,\delta\left(E_f - E_i^{(0)} - \hbar\omega\right) dv_f.$$

Основная сложность заключается в вычислении матричного элемента F_{fi} сюрфон-риплонного взаимодействия.

Чтобы исследовать испарение сюрфонов, вызванное взаимодействием с риплонами, мы применили такой же подход, как и в теории взаимодействия с риплонами электронов на поверхности жидкого гелия (см. параграф 9 в монографии. Так, в адиабатическом пределе, когда риплоны длиноволновые и волновая функция сюрфона успевает подстроиться под локальное искривление поверхности, недиагональные матричные элементы сюрфон-риплонного взаимодействия совпадают с матричными элементами оператора

$$\hat{V} = \delta H - \hbar k_z \dot{\xi},$$

взятыми по невозмущенным состояниям системы |l,k,n>. Здесь индекс l нумерует квантовые уровни сюрфона вдоль оси z (один дискретный уровень и весь набор непрерывного спектра, определяемый волновым числом k_{z}), k волновой вектор сюрфона вдоль плоскости, n - индекс, характеризующий риплонную систему. Для однориплонных процессов рассеяния n является волновым вектром риплона.

Вычисление гамильтониана взаимодействия (продолжение).

В нашем потенциале оператор $k_z = -i\partial/\partial z$,

$$\delta H = \delta V_s + \delta K_s.$$

Поправка к оператору кинетической энергии сюрфона

$$\delta K_s = -\frac{\hbar^2}{M_{He}} k_z (\mathbf{k} \nabla \xi),$$

а изменение потенциальной энергии сюрфона из-за риплона

$$\delta V_s(\mathbf{r}, z) = n_{He} \int d^2 \mathbf{r_1} [\xi(\mathbf{r_1}) - \xi(\mathbf{r})] V_{LJ} \left(\sqrt{(\mathbf{r_1} - \mathbf{r})^2 + z^2} \right).$$

где
$$\xi(\mathbf{r}_1) - \xi(\mathbf{r}) = \xi_0 \cos(\omega t) [\cos(\mathbf{q}\mathbf{r}_1) - 1].$$

и амплитуда риплона, нормированная на поверхность площади *S*:

$$\xi_{0q} = \left(\frac{\hbar}{2S\sqrt{\rho_{He}\alpha q}}\right)^{1/2}$$

Вычисление гамильтониана взаимодействия (продолжение).

Подставляя потенциал Леннарда-Джонса и искривление поверхности, создаваемое риплоном, вычисляя интеграл получим:

$$\begin{split} \delta V_q(z) &= 4\pi \epsilon_0 n_{He} \xi_0 \sigma_0^2 \cos\left(\omega t\right) f(q,z) \\ \text{ rge } f(q,z) &\equiv \left(\frac{q^5 K_5(qz)}{1920 z^5} - \frac{1}{5z^{10}}\right) \sigma_0^{10} + \left(\frac{q^2 K_2(qz)}{4z^2} - \frac{1}{2z^4}\right) \sigma_0^4 \end{split}$$

и K_n(qz) - модифицированная функция Бесселя порядка n. Главный расходящийся член при z→0 здесь сокращается.

Для длинноволновых риплонов

$$f_{qz\ll 1}(q,z) \approx q^2 \left[\frac{\sigma_0^{10}}{80z^8} - \frac{\sigma_0^4}{8z^2} \right].$$

При qz~1 функция стремится к конечному пределу:

$$f(q,z) \to \frac{5z^6 + 2\sigma_0^6}{10z^{10}} \sigma_0^4.$$

Более точная аппроксимация, используемая в дальнейшем:

$$f(q,z) \approx \left[\frac{\sigma_0^{10}}{80z^8} - \frac{\sigma_0^4}{8z^2}\right] \frac{q^2}{1 + q^2 z^3/8\sigma_0}.$$

Гамильтониан взаимодейстия риплонов и сюрфонов. График полученного потенциала взаимодействия.

Мы выяснили, что потенциал риплон-сюрфоннного взаимоействия

$$\hat{V} = \sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega_q t} \left[\delta V_q(z) - \xi_{0q} \left(\frac{\hbar^2(\mathbf{k}_{\parallel}\mathbf{q})}{M_{He}} - \hbar\omega_q \right) \frac{\partial}{\partial z} \right].$$

Главный вклад в матричные элементы (95%) происходит от потенциальной энергии $\delta V_q(z)$

Графики полученного потенциала (синяя сплошная линия), его апроксимации при qz<<1 (пуктирная чёрная линия), и более точной апроксимации, использующейся в дальнейшей работе (пунктирная красная линия).



График полученного потенциала взаимодействия (продолжение).

Графики полученного потенциала (синяя линия) его апроксимации в нуле (пуктирная чёрная линия) и более точной апрксимации, использующейся в дальнейшей работе (пунктирная красная линия).

Волновая функция сюрфона.

Для вычисления матричных элементов для потенциала взаимодействия между дискретеным уровнем атома гелия (сюрфоном) и состояниями непрерывного спектра (паром гелия) прежде всего необходим явный вид волновых функций. Численное решение уравнения Шредингера в принципе позволяет найти волновые функции сюрфона, но решение дифференциального уравнения для волновых функций на каждом шаге интегрирования при вычислении матричного элемента, с последующим интегрированием квадрата матричного элемента при вычислении времени испарения сюрфона, оказывается довольно трудоемким вычислением даже для современных компьютеров. Кроме того, полностью численный расчет не укажет на особенности задачи также явно, как аналитические выражения. Поэтому, для оценки выберем следующий приближенный вид волновой функции атома гелия на дискретном уровне, которая как и точная волновая функция экспоненциально спадает при z→∞ и обращается в нуль перед самой границей жидкость-пар из-за короткодействующего отталкивания между атомами гелия:

$$\psi_0(z) \approx \kappa^2 (z - z_0) \exp\left(-\kappa (z - z_0)\right), \ \kappa \equiv \sqrt{2M_{He} E_{s0}^{He}/\hbar^2}.$$

Здесь Е_{s0}^{не} -- энергия атомов на дискретном уровне, z₀≈1.75А – расстояние от поверхности, на котором волновая функция сюрфона спадает практически до нуля.

График волновой функции сюрфона.

Сравнение волновой функции сюрфона, полученной из решения уравнения Шредингера (сплошная синяя линия), с её апроксимацией (пунктирная красная линия)

$$\psi_0(z) \approx \kappa^2 (z - z_0) \exp\left(-\kappa (z - z_0)\right), \ \kappa \equiv \sqrt{2M_{He} E_{s0}^{He}}/\hbar^2.$$

Видно, что эта апроксимация даёт очень хорошее приближение для сюрфонного состояния атома гелия.

Волновая функция атома пара.

Волновые функции непрерывного спектра, обращающиеся в ноль на границе z=z₀, выберем в виде плоских волн, нормированных на единицу длине I=1 вдоль оси z:

$$\psi_k(z) = \sqrt{2/l} \sin[k(z-z_0)] - \lambda_k \psi_0(z) ,$$

где множитель λ_к выбран таким образом, чтобы волновые функции ψ_к были ортогональны ψ₀:

$$\begin{split} \lambda_k &= \int \psi_0^*(z) \, \psi_k(z) \, dz \\ &\approx \int_{z_0}^\infty \sqrt{2/l} \kappa^{3/2} \sin[k(z-z_0)](z-z_0) \exp\left[-\kappa(z-z_0)\right] dz \\ &= \frac{2\sqrt{2/l} \kappa^{5/2} k}{\left(\kappa^2 + k^2\right)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\kappa l}} \ll 1. \end{split}$$

Поскольку λ_k«1, все недиагональные матричные элементы (кроме тех, где главный член зануляется) могут быть вычислены по упрощенным функциям

$$\psi_k(z) = \sqrt{2/l} \sin[k(z - z_0)].$$

Вдоль плоскости поверхности, волновые функции сюрфонов и атомов пара могут быть выбраны в виде плоских волн:

$$\psi(\mathbf{r}_{\parallel}) = \exp(i\mathbf{k}_{\parallel}\mathbf{r}_{\parallel}).$$

Вычисление матричных элементов сюрфон-риплонного взаимоействия

Вычислим матричные элементы оператора сюрфон-риплонного взаимоействия

$$\hat{V} = \sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega_q t} \left[\delta V_q(z) - \xi_{0q} \left(\frac{\hbar^2(\mathbf{k}_{\parallel}\mathbf{q})}{M_{He}} - \hbar\omega_q \right) \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

Матричные элементы оператора импульса p_z=-iħ∂/∂z равны

$$\int \psi_0^*\left(z\right) \frac{-i\hbar\partial}{\partial z} \psi_k\left(z\right) dz = \frac{2\sqrt{2/l}\hbar k\kappa^{3/2} \left(\kappa^2 - k^2\right)}{\left(\kappa^2 + k^2\right)^2}.$$

Матричные элементы потенциала (в описанном выше приближении) записываются в виде:

$$\delta V_{qk0} \approx 4\pi\epsilon_0 n_{He}\xi_{0q}\cos\left(\omega_q t\right) \int_{z0}^{\infty} dz \psi_0^*\left(z\right) \psi_k\left(z\right) \left[\frac{\sigma_0^{12}}{80z^8} - \frac{\sigma_0^6}{8z^2}\right] \frac{q^2}{1 + q^2 z^3/8\sigma_0}$$

Вычисление матричных элементов сюрфон-риплонного взаимоействия (окончание)

В полученном выражении знаменатель не сильно зависит от z, кладя $z^3 = \langle z^3 \rangle \approx 60 \text{Å}^3$ получим:

$$\delta V_{qk0} \approx V_{qt0} \int_0^\infty dz \sin[kz)] z \exp[-\kappa z] \left[\frac{\sigma_0^6}{80 (z+z_0)^8} - \frac{1}{8 (z+z_0)^2} \right]$$

rge
$$V_{qt0} \equiv 4\pi \epsilon_0 n_{He} \sigma_0^6 \kappa^{3/2} \sqrt{2/l} \cos(\omega_q t) \xi_{0q} \frac{q^2}{1+q^2 < z^3 > /8\sigma_0}.$$

Матричный элемент кинетической части сюрфон-риплонного взаимодействия дается выражением

$$K_{q0k} = \xi_{0q} \left(\frac{\hbar^2(\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{q})}{M_{He}} - \hbar \omega_q \right) \left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_{q0k}$$

Этот матричный элемент оказывается на 1-2 порядка меньше матричного элемента потенциальной части сюрфон-риплоннного взаимоействия, и по этому в дальнейшем мы его не учитываем.

Оценка времени жизни сюрфона

Вероятность перехода в единицу времени между двумя состояниями непрерывного спектра дается выражением

$$w_{if} \left(\mathbf{k}_{\parallel i} \right) = \frac{2\pi}{\hbar} \int d\nu_{i} d\nu_{f} \left| V_{kq} \right|^{2} \delta \left(E_{f} - E_{i} - \hbar \omega_{q} \right) \\ = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{S d^{2} \mathbf{q}}{(2\pi)^{2}} n_{B} \left(\omega_{q} \right) \int \frac{l dk_{z}}{2\pi} \left| V_{kq} \right|^{2} \\ \times \delta \left(\frac{\hbar^{2} \left(\mathbf{k}_{\parallel i} + \mathbf{q} \right)^{2}}{2M_{4}^{0}} + \frac{\hbar^{2} k_{z}^{2}}{2M_{4}^{0}} - \frac{\hbar^{2} \mathbf{k}_{\parallel i}^{2}}{2M_{4}^{0}} + \left| E_{s}^{He4} \right| - \hbar \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} q^{3/2} \right)$$

После интегрирования по конечным состояниям k_z и по импульсу риплона q в полярных координатах, подставляя константы, получим для ⁴Не:

$$w_{if}^{He4}(k_{\parallel i}) \approx 1.22 \cdot 10^{13} \int_{0}^{\infty} \frac{d(q^{2})}{\exp\left(-\frac{11.8}{T}q^{3/2}\right) - 1} \frac{q^{7/2}}{(1+3q^{2})^{2}}$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{\left(k_{\parallel i}q\right)^{2} - \left(q^{3/2} - \frac{q^{2}}{2} - \frac{1}{2} - 0.615^{2}\right)^{2}}}$$

Для сюрфонов с энергией порядка температуры (k_ш≈(3A)⁻¹) скорость испарения равна 3•10⁸ сек⁻¹, что соответствует ширине уровня сюрфона 0.0022К. Это намного меньше характерной энергии сюрфона, и, следовательно, сюрфоны можно считать квазичастицами.

Графики зависимости скорости испарения сюрфона от его волнового вектора и температуры.

С повышением температуры и с увеличением начальной энергии сюрфона скорость его испарения заметно увеличивается (что согласуется с физической интуицией). Однако эта скорость испарения даже при T=4K не превышает энергии сюрфона, поделенной на ħ. Поэтому даже при столь высокой для жидкого ⁴Не температуре можно считать сюрфоны квазичастицами.